حد تابع

حد رفتار تابع در اطراف یک نقطه را بررسی می‌کند لذا هر حد به 2 حد راست و حد چپ تبدیل شده که در صورت برابر بودن آنها تابع در نقطه موردنظر دارای حد خواهد بود.

$$\lim_{x\to a} f(x)=\begin{cases} \text{حد چپ}: \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L \\ \text{حد راست}: \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=k \end{cases} \Rightarrow \text{تابع حد دارد } L=k$$

یادآوری: حاصل کسرهای زیر را به خاطر می‌سپاریم.

$$\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}=0 \qquad \frac{\text{عدد}}{\infty}=0$$

$$\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}=\begin{cases} \dfrac{\text{عدد}}{\text{صفر نسبی}}=\infty \\ \dfrac{\text{عدد}}{\text{صفر مطلق}}=\text{تعریف نشده} \end{cases} \qquad \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}=\begin{cases} \dfrac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر نسبی}}=0 \\ \dfrac{\text{صفر نسبی}}{\text{صفر مطلق}}=\text{تعریف نشده} \end{cases} \qquad \begin{aligned} \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر مطلق}}&=\text{تعریف نشده} \\ \frac{\text{صفر نسبی}}{\text{صفر نسبی}}&=\text{مبهم} \end{aligned}$$

رفع ابهام حالت‌های مقدماتی

برای رفع ابهام حالت‌های $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ (دو حالت $0\times\infty$ و $\infty-\infty$ همواره به یکی از 2 حالت قبل تبدیل می‌شود) از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0} \text{ یا } \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{Hop} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

حاصل حد جدید هر مقداری شد همان حاصل حد اولیه نیز خواهد بود و در صورت مبهم شدن مجدد حد این عمل (هوپیتال) را تکرار می‌کنیم.

یادآوری چند قاعده مشتق‌گیری

1) $y=u^n \rightarrow y'=nu'u^{n-1}$

2) $y=uv \rightarrow y'=u'v+v'u$

3) $y=\frac{u}{v} \rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

4) $y=\sqrt{u} \rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

5) $y=\sqrt[n]{u} \rightarrow y'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

6) $y=e^u \rightarrow y'=u'e^u$

7) $y=a^u \rightarrow y'=u'a^u\ln a$

8) $y=\ln u \rightarrow y'=\frac{u'}{u}$

9) $y=\log_a u \rightarrow y'=\frac{u'}{u\ln a}$

10) $y=\sin u \rightarrow y'=u'\cos u$

11) $y=\cos u \rightarrow y'=-u'\sin u$

12) $y=\tan u \rightarrow y'=u'(1+\tan^2 u)$

13) $y=\cot u \rightarrow y'=-u'(1+\cot^2 u)$

14) $y=\text{Arc}\sin u \rightarrow y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

15) $y=\text{Arc}\tan u \rightarrow y'=\frac{u'}{1+u^2}$

قواعد هم‌ارزی

برای رفع ابهام حد می‌توان به جای تابع موجود در حد هم‌ارز آن را قرار داده به این امید که حد به ظاهر ساده‌تری تبدیل شود و قابل رفع ابهام باشد.

تذکر مهم: در استفاده از هر نوع قاعده هم‌ارزی ابتدا اولین جمله هم‌ارزی را قرار می‌دهیم در صورتی که قرینه جمله اول در حد موجود بود علاوه بر اولین جمله باید دومین جمله هم‌ارزی را نیز قرار دهیم (هم‌ارزی تعمیم‌یافته) تا جمله‌ای داشته باشیم که قرینه آن در حد موجود نباشد.

هم‌ارزی‌های مهم

در کلیه هم‌ارزی‌های زیر A عبارتی بر حسب x بوده که باید به سمت صفر میل کند.

$A \to 0$

$$e^A \sim 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \ldots$$

$$\cos A \sim 1 - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} - + \ldots$$

$$\sin A \sim A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - + \ldots$$

$$tgA \sim A + \frac{A^3}{3} + \frac{2A^5}{15} + \ldots$$

$$\text{Arc } tgA \sim A - \frac{A^3}{3} + \frac{A^5}{5} - + \ldots$$

$$\sin hA \sim A + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} + \ldots$$

$$\cosh A \sim 1 + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} + \cdots$$

$$\ln(1+A) \sim A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - + \ldots$$

رفع ابهام حالت‌های مبهم نمایی

برای رفع ابهام کردن حالت‌های ∞^0 و 0^∞ و 1^∞ و 0^0 ابتدا حد را مساوی یک پارامتر قرار داده و از طرفین حد $\ln$ می‌گیریم بدین ترتیب حد به یکی از حالت‌های مبهم مقدماتی تبدیل می‌شود و قابل رفع ابهام خواهد بود.

نکته خیلی مهم: هرگاه $I = \lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)}$ حالت مبهم 1^∞ باشد می‌توان آن را از طریق $I = e^{\lim\limits_{x \to a} g(x)(f(x)-1)}$ محاسبه کرد.